1. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 7x + 2z &= 9 \\ -14x + 4y - 3z &= -13 \\ 21x + 8y - 10z &= 39 \end{aligned}$$

Megoldás

Felírva a kibővített együtthatómátrixot majd Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ -14 & 4 & -3 & -13 \\ 21 & 8 & -10 & 39 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -16 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -18 & 2 \end{array}\right]$$

Innen $z = -\frac{1}{9}$, aztán a második sorból: $4y - \frac{1}{9} = 5$, innen $y = \frac{46}{36}$, végül az első sorból $7x - \frac{2}{9} = 9$, innen $x = \frac{83}{63}$.

2. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{3n+4}$$

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{3n+4} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{3n+3+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{3n+3} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right)^3 \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) = \left(\mathrm{e}^2\right)^3 \cdot 1 = \mathrm{e}^6$$

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$(1+i)^4 z^2 + i = 0$$

Megoldás Mivel

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^4 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -4,$$

így a megoldandó egyenlet:

$$-4z^2 + i = 0,$$

azaz
$$z^2 = \frac{-i}{-4} = \frac{1}{4}i = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
Innen négyzetgyököt vonva kapjuk a két megoldást:
$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right) \quad k = 0, 1$$
Azaz:
$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$$
$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

4. Határozza meg az alábbi határértéket amennyiben létezik!
$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$$

Megoldás

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{|(x-1)(x+1)|}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1||x+1|}{x - 1},$$
Egyrészt $\lim_{x\to 1} |x + 1| = 2$.

Másrészt viszont mivel $|x| = -x$, ha $x < 0$ és $|x| = x$, ha $x \geq 0$ így
$$\lim_{x\to 1+} \frac{|x - 1|}{x - 1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$
és
$$\lim_{x\to 1-} \frac{|x - 1|}{x - 1} = \lim_{x\to 1+} \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1,$$
így
$$\lim_{x\to 1+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = 2$$
és
$$\lim_{x\to 1-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = -2,$$
tehát a keresett limesz nem létezik.

5. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági pontjait, szakadási pontjait és azok típusát!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{4x^2+4x+1} & \text{ha } x < 0 \\ \\ \sqrt{x^2+5x+4} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Megoldás Meg kell vizsgálnunk az illesztési pont, a negatív x-ekre a nevező gyökeit és $x \geq 0$-re, hogy a négyzetgyök alatt szerepel-e negatív szám.

$$x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4) \geq 0$$

A gyöktényező alakból látszik, hogy a két gyök a -1 és a -4, és mivel x^2 együtthatója pozitív, így ez egy felfelé nyíló parabola. Tehát $x^2 + 5x + 4$ negatív ha $x \in (-4, -1)$, egyébként nemnegatív értékeket vesz fel. Tehát minden pozitív x-re pozitív, így a négyzetgyök az összes $x > 0$-re értelmezett és folytonos. (Egyszerűbben: $x^2 + 5x + 4$ tagonként pozitív, ha x pozitív.)

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2 = 0$$

Ezen egyenlet egyetlen megoldása az $x = -\dfrac{1}{2}$, itt

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x+2}{4x^2+4x+1} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{\overbrace{x+2}^{\frac{3}{2}}}{\underbrace{(2x+1)^2}_{\to 0+}} = +\infty$$

Ezért ebben a pontban a függvénynek lényeges szakadása van.

Végül az illesztési pontban:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x+2}{4x^2+4x+1} = \frac{0+2}{0+0+1} = 2$$

és

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \sqrt{x^2+5x+4} = \sqrt{0+0+4} = 2$$

Mivel $f(0) = \sqrt{0+0+4} = 2$ ami egyben a jobb és bal limesz is, ezért ebben a pontban a függvény folytonos.

Azaz $f(x)$ folytonos $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{1}{2} \right\}$-en.